Solution 8 :

1°/ φ est définie, continue et dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall x \in [0,\pi]$, $\varphi'(x) = -4\sin x \leq 0$

x	0		π
$\varphi'(x)$	0	$-$	0
$\varphi(x)$	5	↘	-3

2°/a) φ est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc φ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-3,5]$ et comme $0 \in [-3,5]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in [0,\pi]$ par φ et par suite l'équation $\varphi(x) = 0$, admet une seule solution $\alpha \in [0,\pi]$.

b) on a : $\begin{cases} \varphi(\frac{\pi}{2}) \cdot \varphi(\frac{2\pi}{3}) < 0 \ \ et \\ \varphi \text{ est continue sur } [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$ donc $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

c) D'après le tableau des variations de φ on a :

x	0		α		π
$\varphi(x)$	5	$+$	0	$-$	-3

x	0		α		π
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	

3°/a) La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur **R** et en particulier sur $[0,\pi]$; et la fonction $x \mapsto 2x^2 + x - 1$ est dérivable sur **R** donc f est dérivable sur $[0,\pi]$ comme composée de ces deux fonctions ; et $\forall x \in [0,\pi]$,

$f'(x) = -4\cos x \cdot \sin x - \sin x = -\sin x \cdot (4\cos x + 1) = -\sin x \cdot \varphi(x)$.